Aspekte der Mathematik: (Quanten)Physik

„Il libro della natura e scritto in lingua matematica" (Galiei)

Mathematik ist die exakteste, eindeutigste und universellste Sprache, insbesondere zur Beschreibung von physikalischen Vorgängen (vgl http://sciencev1.orf.at/science/news/152068). (Universell auch im Sinn, dass mathematische Ausdrücke auch zB in einer chinesischen Publikation verständlich sind.)

Über lange Zeit waren Mathematik und Physik als Wissenschaftsdisziplinen „ineinander verwoben",
zB *Archimedes*, ..., *Newton*, ... waren in beiden Gebieten gleichzeitig bahnbrechend, und noch die Schöpfer von Relativitätstheorie (*Einstein*,...) und Quantenmechanik (*Schrödinger, Dirac, von Neumann*, ...) waren meist sowohl erstklassige Mathematiker als auch (theoretische) Physiker. Ein typisches Curriculum eines MathematikStudiums umfasste früher viel Physik, Mechanik.

Erst nach dem zweiten Weltkrieg wurde die Spezialierung / Trennung systematisch, heute kaum mehr Physikvorlesungen Pflicht in Mathematik, kaum Doppelstudien Mathematik+Physik.

!)
Physik beruht ganz wesentlich auf Mathematik,
nicht nur die „theoretische Physik" (allgemeine Relativitätstheorie ist Differentialgeometrie, „String Theorie",...)
sondern auch die „ExperimentalPhysik", wo zB zum Aufbau eines Experimentes viel berechnet wird.
Und natürlich die „ComputerPhysik" als modernes 3. Standbein der Physik, wo es im Kern um mathematische Modellierung und numerische Mathematik geht – „Scientific Computing" ist ein Teil der Mathematik.

Mathematik ist oft auch der Schlüssel zum physikalischen Verständnis, wo (noch) keine mathematische Modellierung, keine Gleichung, bekannt ist: mit statistischen Methoden können Zusammenhänge (Korrelationen) gefunden und quantifiziert werden. (Statistik / Wahrscheinlichkeitstheorie sind Teilgebiete der Mathematik)

Jede physikalische **Formel**, oder **Gleichung** ist ein mathematisches Objekt.

Bsp für Formeln:

1) „Ohm'sches Gesetz"

$I = U / R$

„Strom ist Spannung durch Widerstand"
„Strom ist der Spannung direkt proportional mit Faktor $1/R$"
„Spannung ist Strom proportional mit Faktor R" : $U = I R$
$U / I = \text{const} = R$: „Spannung durch Strom ist eine Konstante, die Widerstand genannt wird"

Formel -> Funktion

Durch Auffassen gewisser Grössen als unabhängige Variable(n), und anderer als freier aber fester „Parameter"

„Ohm'sches Gesetz = 1 Gleichung mit 3 Unbekannten":

zB $I = I(U) = 1/R\ U$ ... „Strom ist lineare Funktion der Spannung"

$I = I(U, R)$ = Strom ist linear in Spannung und reziprok („1/x Funktion") in Widerstand.

Usw. : 8 mögliche verschiedene Auffassungen der Formel mit 3 Variablen als Funktion.

Beachte: das Ohm'sche Gesetz ist eine „makroskopische, „phänomenale" Beschreibung von (direkt) messbaren Grössen. Dahinter steckt eine „mikroskopische" Beschreibung: elektrischer Strom als Transport von Ladungsträgern in einem Medium -> diskretes Modell: Bewegung von Elektronen (Löchern, Spin) unter dem Einfluss von elektrischen Kräften – „kinetische Gleichungen" (Boltzmann Gleichung, Vlasov Gleichung,...) aus denen die makroskopischen Grössen berechnet werden können.

2) <u>W = F . s</u>

<u>„Arbeit ist Kraft mal Weg"</u>

?? Arbeit ist ein Skalar, Kraft ist doch ein Vektor ?! Wie kann das passen ? Es muss doch links und rechts einer Gleichung die selbe Klasse von Objekten stehen !

! Beachte: Weg ist auch ein Vektor !
Genauer gesagt: Kraft längs des Weges mal Weg -> das „mal" muss das Skalarprodukt sein.
(ergibt also Null, wenn die Kraft senkrecht auf den Weg steht)

3) <u>E = m c^2</u> („Einstein'sche Masse-Energie Äquivalenz")

Eine Ruhemasse m ist zur Energie E äquivalent mit Umrechnungsfaktor Quadrat-der-Lichtgeschwindigkeit.

?! Stimmen die Einheiten links und rechts überein ?!

Vgl kinetische Energie: E_kin = <u>T = m v^2 / 2</u> : GeschwindigkeitsVektor zum Quadrat gibt Zahl.

[T] = [m] [v]^2 = kg m^2 s^-2
[W] = [F] [s] = kg m s^-2 m

Die eckige Klammer bedeutet, dass von einer physikalischen Grösse die Einheit genommen wird.

4) <u>**2. Newton'sches Gesetz:**</u>

<u>**F = m . a**</u>

„Kraft ist Masse mal Beschleunigung"
(wobei Kraft und Beschleunigung beides Vektor-grössen sind)

Hier verschwindet der Unterschied zwischen Formel und Gleichung.

Die „Formel“ kann nämlich auch als „gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung“ aufgefasst werden:

a‘‘(t) = F / m

x(0) = x_0
x‘(0) = v_0

x‘(t) = v(t)
v‘(t) = F/m

Und damit können Fragen beantwortet werden wie: wie hoch kommt ein Ball, der senkrecht nach oben geworfen wird mit 100 km/h ?
Wie schnell kommt man bei einem „Abfaller“ vom 10 m Brett an der Wasseroberfläche auf ?
Oder wie weit fliegt eine Kanonenkugel, die mit Mündungsgeschwindigkeit 500 km/h im Winkel von 20 Grad abgefeuert wird ?
(Beachte: beim senkrechten Wurf kann man auch ohne Differentialgleichung mit Energieerhaltung rechnen).

Die meisten Gleichungen der Physik sind (partielle) Differentialgleichungen:

Gewöhnliche DG :

zB **5) radioaktiver Zerfall**

N(t) = N_0 exp(- lambda t),   lambda und t positive reelle Zahl,

(Diese „Formel“ folgt aus der Annahme: „die Zerfallsrate ist proportional zur momentanen Anzahl der Atome“ und der Lösung der entstehenden Gleichung)

Berechnung der „Halbwertszeit“.

?? Modellierung, mit stetigem reellen N für diskrete Atome !? - (gute) Näherung !

Partielle DG:

zB **6) Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit** :

EulerGleichungen für **v**(x,t) (= Strömungsgeschwindigkeit)
Navier-Stokes Gleichungen im „viskosen“ Fall.

(auch hier Modellierung mit KontinuumsModell für Teilchen !)

zB 7) ***Schrödingergleichung*** für (die Dynamik von) „Quantenteilchen“

Psi(x,t) … komplexwertige „Wellenfunktion“

Navier-Stokes / Euler Gleichungen für inkompressible Flüssigkeit, im $\mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} \vec{v}(x,t) & \text{"Geschwindigkeitsfeld"}, \ t > 0 \ \cdot x \in \mathbb{R}^d \\ p(x,t) & \text{"Druck"} \end{cases}$$

bzw

$\cdot x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet

1) $$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\,\vec{\nabla}\vec{v} = \nu \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} p + \vec{f}$$

$\vec{f}(x,t)$ ... Kraft (zB gravitation)

2) $$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

3) $$\vec{v}(x, t=0) = \vec{v}_0(x)$$

Bem

$\cdot$ $$\vec{\nabla} p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$\cdot$ $$\Delta \vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}$$

$\cdot$ $$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

= Vektor

$\cdot$ $$\vec{v}\,\vec{\nabla}\vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{v} \otimes \vec{v}) = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

"nichtlinear": Lösung $\vec{v}$ der Gleichung "ist Koeffizient von $\vec{v}$" in der Gleichung!

Bem.

⊙ $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ ... "Inkompressibilität"

(Erhaltungsgesetz: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

$\rho(x,t)$ ... "Dichte" $\cong$ Konstant

⊙ "Anfangsbedingung"

$\vec{v}_0(x)$ ... legt den Funktionenraum fest.

z.B. $\vec{v}_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$

$\downarrow$ unendlich oft stetig differenzierbar

1) + 2) + 3) : Navier-Stokes Glg.

1) + 2) + 3) mit $\nu = 0$: Euler Glg.

keine "Viskosität"

⊙ Für physikalisch sinnvolle Lösungen wird verlangt:

$$|\partial_x^\alpha \vec{v}_0(x)| < C_{\alpha K}(1+|x|)^{-K}$$ "Abklingen für $|x| \to \infty$"

$\forall \alpha, m, K$

ebenso

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^m \vec{f}(x,t)| \leq C_{\alpha m K}(1+|x|+|t|)^{-K}$$

Schrödinger Gleichung (zeitabhängig)

↓

"Quanten Dynamik"

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi & t \geq 0 \\ & x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \\ \psi(t=0) = \psi_0(x) \end{cases}$$

$\psi(x,t) \in \mathbb{C}$ ... "Wellenfunktion" (komplexe Zahl!)

Δ ... "Laplace Operator": $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \psi$

bzw

$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(\psi))$

⊙ V ... "Potential" (Multiplikation von ψ mit reeller Zahl)

"linearer" Fall: V gegeben, $V = V(x)$

$V = V(x,t)$

"nichtlinearer Fall":

↕

"die Lösung der Gleichung ist Teil der Gleichung"

↕

"Ursache und Wirkung ineinander verwoben"

$V = V(\psi)$ bzw $V = V(\rho)$

$\rho = |\psi|^2$ ... "Dichte"

$\rho(x,t)$ ... Wahrscheinlichkeit, "das Teilchen" zum Zeitpunkt t am Ort x zu finden